第 48 卷 第 2 期 中山大学学报 (自然科学版) Vol. 48 No. 2
2009 年 3 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Mar. 2009

截断前马氏过程与截断后马氏过程*

唐 荣[1,2] 黄永辉[1]
(1. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275；
2. 海南大学经济学院，海南 海口 570228)

摘 要：证明了任一马氏过程 $X(t,\omega)$ ，若用一停时 $\alpha(\omega)$ 去截 $X(t,\omega)$ 的样本轨道，则截断前的样本轨道函数在满足条件 $\{\alpha > t\} \in F_t^\infty$ 的条件下是一马氏过程，同时得到了截断后的样本轨道函数也是一马氏过程。另外，对于任意的随机过程，证明了 $X(t,\omega)$ 的 t 前 σ - 代数 F_t 满足右连续性（即 $F_t = \cap_{s>t} F_s$ ），以及任一首达时间是一停时。

关键词：马氏过程；停时；截断 α - 前 马氏过程；截断 α - 后 马氏过程；首达时间

中图分类号：O211.62 **文献标识码**：A **文章编号**：0529-6579 (2009) 02-0005-06

The Truncated Markov Processes Prior to α and the Truncated Markov Processes After α

TANG Rong[1,2] *HUANG Yonghui*[1]
(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. School of Economic, Hainan University, Haikou 570228, China)

Abstract: It is proved that the truncated sample path function of a Markov process $X(t,\omega)$ prior to $\alpha(\omega)$ is still a Markov process if $\{\alpha > t\} \in F_t^\infty$ for every $t \geqslant 0$, and the one after $\alpha(\omega)$ is also a Markov process. Moreover, for an arbitrary stochastic process $X(t,\omega)$ which may not be a Markov process, it is showed that the σ -algebra F_t prior to t of $X(t,\omega)$ is right continuous (*i. e.* , $F_t = \cap_{s>t} F_s$) and the first hitting time is a stopping time.

Key words: Markov processes; stopping time; truncated Markov processes prior to α ; truncated Markov processes after α ; first hitting time.

设 $X(t,\omega) := \{x_t(\omega); t \geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 (Ω, F, P) 取值于可测空间 (E, Ξ) 上的随机过程。因此，对于任意的 $A \in \Xi$ ，有 $\{\omega : x_t(\omega) \in A\} \in F$ 。当 $X(t,\omega)$ 不中断时，由随机过程的定义知：对于任意的 $t \geqslant 0, x_t : \Omega \to E$ 是从 Ω 到 E 上的映射，但并不是对于任意过程 x_t 都是从 Ω 到 E 上的映射。例如：设 E 为可列空间，Q 为 E 上的全稳定 Q 矩阵，且对应的 Q 过程不唯一，其最小 Q 过程记为 $X^{(\min)}(t,\omega) := \{x_t^{(\min)}(\omega); t \geqslant 0\}$ ，则对于任意的 $t > 0$ ，$x_t^{(\min)}$ 就不是 Ω 到 E 的映射，即存在 $\omega \in \Omega$ ，使得 $x_t^{(\min)}(\omega)$ 没有定义，这是因为：由 Q 过程不唯一及 Q 过程的构造知 $P(x_t^{(\min)}(\omega) \in E) < 1$ （ Q 过程的构造见文献［1-2］等）。显然我们可以扩大状态空间 $\tilde{E} := E \cup \{d\}$ ，其中：$d \notin E$ 。令

$$\tilde{x}_t^{(\min)}(\omega) = \begin{cases} x_t^{(\min)}(\omega), \text{若 } x_t^{(\min)}(\omega) \text{ 有定义} \\ d, \text{若 } x_t^{(\min)}(\omega) \text{ 无定义} \end{cases}$$

则 $\tilde{x}_t^{(\min)}(\omega) : \Omega \to \tilde{E}$ 是从 Ω 到 $\tilde{E}$ 上的映射。但 $\tilde{X}^{(\min)}(t,\omega) := \{\tilde{x}_t^{(\min)}(\omega); t \geqslant 0\}$ 已不是 $X^{(\min)}(t,$

* 收稿日期：2008-06-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60874004）
作者简介：唐荣（1970 年生），男，副教授；E-mail：tanyou01@163.com

ω)。事实上，若固定 ω 的轨道，则 $X^{(\min)}(t,\omega)$ 是 $\tilde{X}^{(\min)}(t,\omega)$ 首达 d 前的这段过程。为了补上对随机过程的定义传统上的这一漏洞，我们引进局部映射的概念。

定义1 称 $\gamma:\Omega\to E$ 是从 Ω 到 E 上的局部映射，若存在 Ω 的一非空子集 $\Omega_1\subseteq\Omega$，使得 $\gamma:\Omega\to E$ 是从 Ω_1 到 E 上的映射且对所有 $\omega\in\Omega-\Omega_1$，$\gamma(\omega)$ 无定义。

显然在这里我们把任一映射都看成了一局部映射。

定义2 若 $\gamma:\Omega\to E$ 是从 Ω 到 E 上的局部映射，若 $\forall A\in\Xi$，有 $\{\omega:\gamma(\omega)\in A\}\in F$，称 $\gamma:(\Omega,F)\to(E,\Xi)$ 是从 (Ω,F) 到 (E,Ξ) 的可测局部映射。

以下我们对随机过程的传统定义稍作扩充。

定义3 称 $X(t,\omega):=\{x_t(\omega);t\geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 (Ω,F,P) 取值于可测空间 (E,Ξ) 上的随机过程，若 $\forall t\geqslant 0,x_t:(\Omega,F)\to(E,\Xi)$ 是从 (Ω,F) 到 (E,Ξ) 上的可测局部映射。

本文主要讨论了截断前马氏过程和截断后马氏过程，得到了以下结论：

（1）任一马氏过程 $X(t,\omega)$，若用一停时 $\alpha(\omega)$ 去截 $X(t,\omega)$ 的样本轨道，则截断前的样本轨道函数在满足条件 $\{\alpha>t\}\in F_t^\infty$ 的条件下是一马氏过程，并用这一结论推广了文献［2］中的相应结论（推论2.2）。截断前马氏过程，目前见到的文献比较少，主要有文献［3，p228］，但文献［3］引进了中断状态，因此扩大了状态空间，同时按照马氏性的定义，文献［3］的证明并不能得出截断前过程是一马氏过程。

（2）证明了 $X(t,\omega)$ 的 t 前 σ—代数 F_t 右连续，即有 $F_{t+}:=\cap_{s>t}F_s=F_t$。这一结果在鞅的理论，马氏过程的研究中都是很需要的结果。利用这一结论我们可以得到许多非常有用结果，如：设 $\xi(t,\omega)$ 为一 F_t—鞅，由文献［4，定理3.5］知存在与 $\xi(t,\omega)$ 等价的所有轨道右连续的 $\tilde{\xi}(t,\omega)$—鞅。这一结果可以改进文献［4］中的许多结论。

（3）设 H 为任一可测集，对于任一随机过程 $X(t,\omega)$，我们得到了首达时间 $\eta_H(\omega)$ 是一停时。首达时间是随机过程研究的一项重要内容，许多文献都有涉及，如：文献［1，3，5－6］等，特别是［1］中讨论了大量的内容。而所有研究首达时间的必要条件就要求它是一停时。对于布朗运动且当 H 为解析集时，文献［6，p344；p376］指出了 $\eta_H(\omega)$ 是一停时，并指出其证明比较难，需要用到 Choquet 的容度论。但对于任意随机过程，并没有得到 $\eta_H(\omega)$ 是一停时这一结论。

（4）任一马氏过程 $X(t,\omega)$，若用一停时 $\alpha(\omega)$ 去截 $X(t,\omega)$ 的样本轨道，则截断后的样本轨道函数是一马氏过程。这一结果是全新的。

1 截断前马氏过程

记 $F_t:=\sigma(x_u:u\leqslant t):=\sigma(\cup_{0\leqslant u\leqslant t}x_u^{-1}(\Xi))$，$F_t^\infty:=\sigma(x_u:u\geqslant t):=\sigma(\cup_{t\leqslant u<\infty}x_u^{-1}(\Xi))$，其中：$\sigma(\cdot)$ 表示由括号内的所有集合所生成的 Ω 上的最小 σ—代数；$x_u^{-1}(\Xi)=\{\{\omega:x_u(\omega)\in A\}:A\in\Xi\}$。设 $\alpha(\omega)$ 是一停时，即 $\forall t\geqslant 0$ 有 $\{\alpha(\omega)\leqslant t\}\in F_t$。

所谓过程的截断，就是用具有随机时间 $\alpha(\omega)$ 去截 $X(t,\omega)$ 的所有样本函数，在截断的样本函数中，$\alpha(\omega)$ 前面（后面）一段样本函数所构成的过程称为截断前（后）过程。$\forall t>0$，令 $x_t^{[0,\alpha)}(\omega)=x_t(\omega)$；当 $\alpha(\omega)>t$ 时。易知 $x_t^{[0,\alpha)}(\omega)$ 是从 (Ω,F) 到 (E,Ξ) 的可测局部映射。记 $X^{[0,\alpha)}(t,\omega):=\{x_t^{[0,\alpha)}(\omega);t\geqslant 0\}$，则 $X^{[0,\alpha)}(t,\omega)$ 是定义在 (Ω,F,P) 取值于 (E,Ξ) 上的随机过程。显然 $X^{[0,\alpha)}(t,\omega)$ 可以写成以下形式：

$$X^{[0,\alpha)}(t,\omega)=(X(t,\omega),\alpha(\omega)>t),\text{即}$$

$$\forall A\in\Xi,\{x_t^{[0,\alpha)}\in A\}=\{x_t(\omega)\in A,\alpha(\omega)>t\}。$$

本文中设 $X(t,\omega)$ 的轨道不中断，否则引进中断状态 d，将 $X(t,\omega)$ 变成非中断过程 $\tilde{X}(t,\omega)$ 来讨论。

定义4 设 $X(t,\omega)$ 是一马氏过程，$\alpha(\omega)$ 是一停时，称 $X^{[0,\alpha)}(t,\omega):=(X(t,\omega),\alpha(\omega)>t)$ 为截断 α—前过程。

引理1 记 $\Pi=\{\{x_{t_1}\in A_1,\cdots,x_{t_n}\in A_n\}:n\geqslant 1;0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant t;A_1,\cdots,A_n\in\Xi\}$，则有

$$\sigma(\Pi)=F_t$$

证明 由 F_t 的定义知

$$\{x_{t_1}\in A_1,\cdots,x_{t_n}\in A_n\}\in F_t$$

故得 $\sigma(\Pi)\subseteq F_t$。反之，$\forall 0\leqslant u\leqslant t$ 有 $x_u^{-1}(\Xi)\subseteq\Pi$，从而 $\cup_{0\leqslant u\leqslant t}x_u^{-1}(\Xi)\subseteq\Pi$，故得 $F_t\subseteq\sigma(\Pi)$。证毕。

记 $N_t=\sigma(\cup_{0\leqslant u\leqslant t}(x_u^{[0,\alpha)})^{-1}(\Xi))$，由引理1及 $\{\alpha>u\}=(x_u\in E,\alpha>u)$ 得以下引理。

引理2 记 $\Pi_\alpha=\{\{x_{t_1}\in A_1,\cdots,x_{t_n}\in A_n,\alpha>u\}:n\geqslant 1;0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant u\leqslant t;A_1,\cdots A_n\in\Xi\}$，则有 $\sigma(\Pi_\alpha)=N_t$。

引理 3　$\forall n \geqslant 1$，设 $B_1, B_2, \cdots, B_n \in F_t$，记 $\Pi_{B_1B_2\cdots B_n} = \{\{x_s \in A\} B_1 \cdots B_n : A \in \Xi\}$，则有

$$\sigma(\Pi_{B_1B_2\cdots B_n}) \subseteq F_s$$

证明　$\forall A \in \Xi$，由 $\{x_s \in A\} B_1 \cdots B_n \in F_s$ 知引理结论成立。

定理 1　若 $X(t,\omega)$ 是一马氏过程，$\alpha(\omega)$ 是一停时，则有

(i) 若 $\alpha(\omega)$ 满足 $\forall u \geqslant 0$，$\{\alpha > u\} \in F_u^\infty$，则 $P(x_u^{[0,\alpha)} \in A \mid N_s) = P(x_u^{[0,\alpha)} \in A \mid \sigma(x_u^{[0,\alpha)})) = P(x_u^{[0,\alpha)} \in A \mid \sigma(x_s)), P_{F_s} - a.e.$

从而 $X^{[0,\alpha 0)}(t,\omega)$ 是一马氏过程。

(ii) 若 $X(t,\omega)$ 的一切样本函数右（右下半）连续，则 $X^{[0,\alpha)}(t,\omega)$ 的一切样本函数右（右下半）连续。

其中 $X(t,\omega)$ 右下半连续是指 $\forall t \geqslant 0$，

$$\liminf_{s \downarrow t} x_s(\omega) = x_t(\omega)$$

证明　(i)注意到 $\{\alpha > t\} \in F_t^\infty$，利用马氏性得

$$P(x_u^{[0,\alpha)} \in A \mid F_s) = P(x_u^{[0,\alpha)} \in A \mid \sigma(x_s)), \quad P_{F_s} - a.e. \tag{1}$$

易知 $\{\alpha > s\} = \Omega - \{\alpha \leqslant s\} \in F_s$，从而由引理 3 及马氏性得

$$P(x_u^{[0,\alpha)} \in A \mid \sigma(x_s^{[0,\alpha)})) = P(x_u^{[0,\alpha)} \in A \mid \sigma(x_s)), \quad P_{F_s} - a.e. \tag{2}$$

由(1)－(2)得

$$P(x_u^{[0,\alpha)} \in A \mid F_s)) = P(x_u^{[0,\alpha)} \in A \mid \sigma(x_s^{[0,\alpha)})), \quad P_{F_s} - a.e. \tag{3}$$

类似引理 3 的证得 $N_s \subseteq F_s$，故在式（3）两边取关于 N_s 的条件期望并由 $\sigma(x_s^{[0,\alpha)}) \subseteq N_s$ 得证。

(ii)只证右下半连续情形．若 $X(t,\omega)$ 右下半连续，显然有

$$\liminf_{s \downarrow t} x_s^{[0,\alpha)} = \liminf_{s \downarrow t} x_s \cap \lim_{s \downarrow t} \{\alpha > s\} = x_t^{[0,\alpha)}$$

为了便于对 t 前 σ —代数 F_t 的理解，我们分析一下概率空间的结构。为此我们构造一个概率空间 (Ω, F, P) 的一个子空间 $(E^{[0,\infty)}, \Xi^{[0,\infty)}, P')$ 及随机过程 $Y(t,\omega') := \{y_t(\omega'); t \geqslant 0\}$，使得 $Y(t,\omega')$ 定义在该空间上，且 $Y(t,\omega')$ 与 $X(t,\omega)$ 有如下关系：

$$y_t(\omega') = x_t(\omega), \text{一切 } \omega' \in E^{[0,\infty)}$$

这里 w' 是 ω 在 $[0,\infty)$ 上的投影，即 $\omega' = \prod_{0 \leqslant t < \infty} \omega_t$，$\omega_t$ 为 ω 在 t 处的投影映射。因此 $Y(t,\omega')$ 与 $X(t,\omega)$ 有相同的轨道。注意到 $X(t,\omega)$ 取值于 (E, Ξ)，设 $x_t(\omega)$ 在 (E, Ξ) 上的概率分布为

$P_{x_t} : P_{x_t}(A) = P(x_t \in A), A \in \Xi$。则得一概率空间 (E_t, Ξ_t, P_{x_t}) 及定义其上的可测映射：$y_t : (E, \Xi) \to (E, \Xi)$，且有

$$y_t(\omega_t) = \omega_t = x_t(\omega)$$

其中 $E_t = E, \Xi_t = \Xi$。显然有

$P_{x_t}(y_t(\omega_t) \in A) = P(x_t \in A) = P_{x_t}(A), \forall A \in \Xi$（至于 $\omega_t = x_t(\omega)$ 见文献［1］§ 1.1（8）），记

$$(E^{[0,\infty)}, \Xi^{[0,\infty)}) := (\prod_{0 \leqslant t < \infty} E_t, \prod_{0 \leqslant t < \infty} \Xi_t)$$

$\forall n \geqslant 1$，令

$$P_{t_1 t_2 \cdots t_n}(A_1, A_2, \cdots A_n) = P(x_{t_1} \in A_1, \cdots x_{t_n} \in A_n)$$

则得一多维概率分布族

$$F = \{P_{t_1 t_2 \cdots t_n}(A_1, A_2, \cdots A_n) : n \geqslant 1;$$
$$0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n < \infty; A_1, \cdots A_n \in \Xi\}$$

显然 F 满足相容性条件，故由 Kolmogorov 和谐定理[7,p358]知 F 可以唯一扩张成 $(E^{[0,\infty)}, \Xi^{[0,\infty)})$ 上的概率测度 P'，这样得一概率空间 $(E^{[0,\infty)}, \Xi^{[0,\infty)}, P')$，定义泛函 $\omega' = \prod_{0 \leqslant t < \infty} \omega_t$ 及随机过程 $Y(t,\omega') := \{y_t(\omega'); t \geqslant 0\}$ 满足

$$y_t(\omega') := y_t(\omega_t) = \omega_t = x_t(\omega)$$

其中 ω_t' 是 ω' 在 t 处的投影。这样我们得到 $(E^{[0,\infty)}, \Xi^{[0,\infty)}, P')$ 上的随机过程 $Y(t,\omega')$，它与 $X(t,\omega)$ 有相同的轨道。

显然引理 1 中的集系 Π 可以唯一扩张成 $X(t,\omega)$ 的 t 前 σ —代数 $F_t = \sigma(\cup_{0 \leqslant u \leqslant t} x_u^{-1}(\Xi))$，故

$$\sigma(\bigcup_{0 \leqslant u \leqslant t} x_u^{-1}(\Xi)) = \Xi^{[0,t]} \times \prod_{u \notin [0,t]} E_u \tag{4}$$

其中 $E_u = E$；$\Xi^{[0,t]} \times \prod_{u \notin [0,t]} E_u$ 表示如下的集合 A' 构成的 σ —代数：

$$A' = B^{[0,t]} \times \prod_{u \notin [0,t]} E_u = \{\omega = \prod_{0 \leqslant u \leqslant t} \omega_u \times \prod_{u \notin [0,t]} \omega_u : \prod_{0 \leqslant u \leqslant t} \omega_u \in B^{[0,t]}, \prod_{u \notin [0,t]} \omega_u \in \prod_{u \notin [0,t]} E_u\}$$

这里 $B^{[0,t]} \in \Xi^{[0,t]}$。因此 $\sigma(\cup_{0 \leqslant u \leqslant t} x_u^{-1}(\Xi))$ 与 $\Xi^{[0,t]}$ 相互唯一决定。

引理 4　(i) 记 $F_{t^+} := \cap_{n=1}^\infty F_{t+\frac{1}{n}}$，则有 $F_{t^+} = F_t$

(ii) 记 $F_{t^-} = \sigma(\cup_{n=1}^\infty F_{t-\frac{1}{n}})$，则有

$$F_{t^-} = \sigma(\bigcup_{0 \leqslant s < t} x_s^{-1}(\Xi))$$

证明　(i)记 $\Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]} = \Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]} \times \prod_{t+\frac{1}{n} < v \leqslant t+1} E_v$，约定：$\Xi^{[0,t+1]} = \Xi^{[0,t+1]}$。显然 $\Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]}$ 是 $\Xi^{[0,t+1]}$ 的一子集且 $\Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]} \downarrow$ 当 $n \uparrow$，则易知

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]} = \Xi^{[0,t]} := \Xi^{[0,t]} \times \prod_{t < v \leqslant t+1} E_v \tag{5}$$

事实上，$\forall n \geqslant 1$，$\Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]}$ 中每一元素 A 都具有以

下形式：

$A = B^{[0,t+\frac{1}{n}]} \times \prod_{t+\frac{1}{n}<u\leqslant t+1} E_u$，其中 $B^{[0,t+\frac{1}{n}]} \in \Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]}$

故 $\cap_{n=1}^{\infty}\Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]}$ 中每一元素具有以下形式

$$B^{[0,v]} \times \prod_{v<u\leqslant t+1} E_u$$

又显然 $\cap_{n=1}^{\infty}\Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]} \supseteq \Xi^{[0,t]}$，若存在集合 A，使得 $A \in \cap_{n=1}^{\infty}\Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]}$，但 $A \notin \Xi^{[0,t]}$。则存在 $v \geqslant u > t$ 使得 $B^{[0,v]}$ 在 u 处的投影集

$$B_u := \{\omega_u : \prod_{0\leqslant s\leqslant v} \omega_s \in B^{[0,v]}\}$$

是 E_u 的真子集。取 n 相当大时，使 $u > t + \frac{1}{n}$，则显然 $A \notin \Xi^{[0,t+\frac{1}{n}]}$，矛盾。再由（4）–（5）式得证(i)。

(ii)显然 $\forall n \geqslant 1$ 有

$$\sigma(\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t-\frac{1}{n}} x_s^{-1}(\Xi)) \subseteq \sigma(\bigcup_{0\leqslant s<t} x_s^{-1}(\Xi))$$

从而有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t-\frac{1}{n}} x_s^{-1}(\Xi)) \subseteq \sigma(\bigcup_{0\leqslant s<t} x_s^{-1}(\Xi))$$

所以 $F_{t-} \subseteq \sigma(\bigcup_{0\leqslant s<t} x_s^{-1}(\Xi))$。为证

$$F_{t-} \supseteq \sigma(\bigcup_{0\leqslant s<t} x_s^{-1}(\Xi))$$

只须证

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t-\frac{1}{n}} x_s^{-1}(\Xi)) \supseteq \bigcup_{0\leqslant s<t}(x_s^{-1}(\Xi)) \quad (6)$$

$\forall A \in \bigcup_{0\leqslant s<t} x_s^{-1}(\Xi)$，则必存在 $0 \leqslant u < t$，使得 $A \in x_u^{-1}(\Xi)$，当 n 相当大时（$u \leqslant t - \frac{1}{n}$），则有 $A \in \cup_{0\leqslant s\leqslant t-\frac{1}{n}} x_s^{-1}(\Xi)$，从而（6）式成立。证毕。

设 $H \in \Xi$，$\eta_H(\omega)$ 为 $X(t,\omega)$ 首达 H 的时间，即令

$$\eta_H(\omega) = \begin{cases} \inf(t : x_t(\omega) \in H), & \text{如右方 } t \text{ 集非空} \\ \infty, & \text{否则} \end{cases}$$

以下定理的证明中用到了超限归纳法，超限归纳法见文献［5］以及文献［2，p28］中的例。

定理2 设 $X(t,\omega)$ 为任一随机过程（不一定是马氏过程），$\forall H \in \Xi$，$\eta_H(\omega)$ 为 $X(t,\omega)$ 首达 H 的时间，则有

(i) $\eta_H(\omega)$ 为一停时，即 $\forall t \geqslant 0$ 有

$$\{\eta_H \leqslant t\} \in F_t$$

(ii) $\forall t \geqslant 0$，$\{\eta_H > t\} \in F_t^{\infty}$

证明 (i)因 $\{\eta_H > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\cap_{0\leqslant s<t+\frac{1}{n}}\{x_s \notin H\}\}$，

所以 $\{\eta_H \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\bigcup_{0\leqslant s<t+\frac{1}{n}}\{x_s \in H\}\}$

若能证明 $\cup_{0\leqslant s<t+\frac{1}{n}}\{x_s \in H\} \in F_{t+\frac{1}{n}}$ 对于任意 $n \geqslant 1$ 成立，则由引理4有 $\{\eta_H \leqslant t\} \in F_{t+} = F_t$。

使用超限归纳法。假设 $<=$ 是 $[0, t+\frac{1}{n})$ 上的一个良序，a_0 是其首元。显然 $\{x_{a_0} \in H\} \in F_{t+\frac{1}{n}}$。假设对所有小于（表示该良序下的“小于”）$T$（$T < t + \frac{1}{n}$）的所有 a 有 $\cup_{s<=a}\{x_s \in H\} \in F_{t+\frac{1}{n}}$。取一个增加数列 $\{a_i; i \geqslant 1, a_i < T\}$ 满足：对任意的数 $t < T$，存在相当大的 i 使得 $t <= a_i$，故得

$$\bigcup_{s<T}\{x_s \in H\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}[\bigcup_{s<=a_i}\{x_s \in H\}] \in F_{t+\frac{1}{n}}$$

所以

$$\bigcup_{s<=T}\{x_s \in H\} = [\bigcup_{s<T}\{x_s \in H\}] \cup \{x_T \in H\} \in F_{t+\frac{1}{n}}$$

因此由超限归纳法知 $\bigcup_{s<=T}\{x_s \in H\} \in F_{t+\frac{1}{n}}$ 对所 $T \in [0, t+\frac{1}{n})$ 成立。又取一增加数列 $\{T_i; i \geqslant 1\}$ 满足：$\forall s \in [0, t+\frac{1}{n})$，存在相当大的 i 使得 $s <= T_i$，故

$$\bigcup_{0\leqslant s<t+\frac{1}{n}}\{x_s \in H\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}[\bigcup_{s<=T_i}\{x_s \in H\}] \in F_{t+\frac{1}{n}}$$

(ii) 由 $\eta_H(\omega)$ 的定义知2）成立。

推论1 若 $X(t,\omega)$ 是齐次马氏过程，$\alpha(\omega)$ 满足定理1的条件，则 $X^{[0,\alpha)}(t,\omega)$ 也是齐次马氏过程。

证明 注意到 $\{\alpha > t\} \in F_t^{\infty}$，从而

$$\{x_t^{[0,\alpha)} \in A\} = \{x_t \in A, \alpha > t\} \in F_t^{\infty}$$

所以由文献［1］§1.6（16）知齐次性成立。

以后本节假设 E 为离散状态空间，用 $i, j, \cdots$ 表示 E 中的状态，取 $A = \{j\}$。

注1 对于离散状态空间，文献［8］II§11.（3）有以下转移概率的定义：

$$_Hp_{ij}(t) =$$
$$P(x_s \notin H, \min[t, \rho_i(\omega)] < s < t, x_t = j \mid x_0 = i)$$

其中 $\rho_i(\omega) = \inf(t : t > 0; x_t(\omega) \neq i)$，$H \subset E$ 是禁止状态集，$i, j \notin H$。显然以上定义是本文转移概率定义的一个特例，事实上，令 $\eta_H(\omega)$ 是 $X(t,\omega)$ 首达 H 的时间，则易知

$$(x_s \notin H, \min[t, \rho_i(\omega)] < s < t, x_t = j) = (x_t = j, \eta_H > t)$$

从而 $_Hp_{ij}(t) = P(x_t = j, \eta_H > t \mid x_0 = i) =$

$$P(x_t^{[0,\eta_H)} = j \mid x_0^{[0,\eta_H)} = i)$$

（因由文献［8］II§11 有

$P_i(\eta_H>0)=\begin{cases}0, i\text{ 与 } H \text{ 相邻}\\ 1, i \text{ 与 } H \text{ 不相邻}\end{cases}$ （理解 $\frac{0}{0}=1$）

注 2　α—前链转移概率的传统定义为 $P(\cdot| x_0=i)$，从转移概率的定义来讲不合理的（由定理 1 知尽管它们相等），因为 α—前链已不是原来的马氏过程。故初始分布应相应的改变。因此我们认为由 $P(x_u^{[0,\alpha)}\in A|\sigma(x_s^{[0,\alpha)}))$ 作为转移概率的定义更合理。

文献［8］Ⅱ§11 中 ${}_HP(t)=({}_Hp_{ij}(t); i,j\in E-H)$ 可以作为定理 1 的一个推论。

推论 2　设 $X(t,\omega)$ 是标准齐次马氏过程，H 是 E 中任一子集，令 $\eta_H(\omega)$ 是 $X(t,\omega)$ 首达 H 的时间，则 $X^{[0,\eta_H)}(t,\omega):=(X(t,\omega),\eta_H(\omega)>t)$ 在 $E-H$ 上的限制是 $E-H$ 上的马氏过程。进一步，若令 $B=\{i:P_i(\eta_H>0)=1\}$，则 $X^{[0,\eta_H)}(t,\omega)$ 在 B 上的限制是 B 上的标准马氏过程。

证明　由文献［8］Ⅱ§11 知

$$P_i(\eta_H>0)=\begin{cases}0, i\text{ 与 } H \text{ 相邻}\\ 1, i \text{ 与 } H \text{ 不相邻}\end{cases}$$

在定理 1 中取 $\alpha(\omega)=\eta_H(\omega)$ 有 $X^{[0,\eta_H)}(t,\omega)$ 是 E 上的马氏过程，记

$p_{ij}^{[0,\eta_H)}(t):=P(x_t^{[0,\eta_H)}=j|x_0^{[0,\eta_H)}=i); i,j\in E$

由定理 1 及推论 1 知当 i 或 $j\in H$ 时有

$$p_{ij}^{[0,\eta_H)}(t)=0$$

从而 $(p_{ij}^{[0,\eta_H)}(t); i,j\in E)$ 在 $E-H$ 上的限制即为马氏过程，进一步对 $P_i(\eta_H>0)=1$ 的所有 i 有

$$p_{ij}^{[0,\eta_H)}(t)=P(x_t=j,\eta_H>t|x_0=i,\eta_H>0)=P(x_t=j,\eta_H>t|x_0=i)。$$

故

$$\lim_{t\to0}p_{ij}^{[0,\eta_H)}(t)=\lim_{t\to0}p_{ij}(t)-\lim_{t\to0}P_i(x_t=j,\eta_H\leqslant t)=\lim_{t\to0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}$$

从而满足标准性。故 $(p_{ij}^{[0,\eta_H)}(t); i,j\in E-H)$ 在 B 上的限制为标准马氏过程。

推论 3　设 C 是任一非负常数，则 $X^{[0,C)}(t,\omega)$ 是 E 上的马氏过程，其转移概率为

$$p_{ij}^{[0,C)}(s,t)=p_{ij}(t); s\leqslant t<C, i,j\in E。$$

证明　由于常数 C 是停时，从而由定理 2.1 知 $X^{[0,C)}(t,\omega)$ 是马氏过程，又注意到 $X^{[0,C)}(t,\omega)=X(t,\omega), t<C$，从而推论成立。

3　截断后马氏过程

定义 5　设 $X(t,\omega)$ 是马氏过程，$\alpha(\omega)$ 是一停时，称 $X^{[\alpha,\infty)}(t,\omega):=(X(t,\omega),\alpha(\omega)\leqslant t)$ 为截断 α—后过程。记作 $X^{[\alpha,\infty)}(t,\omega):=\{x_t^{[\alpha,\infty)}(\omega); t\geqslant0\}$。

由引理 1 得以下引理。

引理 5　记

$${}_\alpha\Pi=\{\{\alpha\leqslant u, x_{t_1}\in A_1,\cdots,x_{t_n}\in A_n\}: n\geqslant1; 0\leqslant u\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant s; A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{E}\},$$

则有

$$\sigma({}_\alpha\Pi)=\sigma(\cup_{u\leqslant s}(x_u^{[\alpha,\infty)})^{-1}(\mathscr{E}))$$

我们称 $\sigma(\cup_{u\leqslant s}(x_u^{[\alpha,\infty)})^{-1}(\mathscr{E}))$ 为 $X^{[\alpha,\infty)}(t,\omega)$ 生成的 s 前 σ—代数，记作 ${}_\alpha N_s$

定理 3　设 $X(t,\omega)$ 是任意马氏过程，$\alpha(\omega)$ 是一停时，则有

(i) $X^{[\alpha,\infty)}(t,\omega)$ 是一马氏过程，且有

$$P(x_t^{[\alpha,\infty)}\in A|{}_\alpha N_s)=P(x_t^{[\alpha,\infty)}\in A|\sigma(x_s^{[\alpha,\infty)}))=P(x_t\in A|\sigma(x_s)),P_{F_s}-a.e.\tag{7}$$

(ii)若 $X(t,\omega)$ 样本函数右（右下半）连续，则 $X^{[\alpha,\infty)}(t,\omega)$ 也右（右下半）连续。

证明　只须证明(i)。设 $u\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant s$，记

$$B=\{x_{t_1}\in A_1,\cdots,x_{t_n}\in A_n\}$$

则 $\forall A\in\mathscr{E}$ 得

$$\int_{B\{\alpha\leqslant u\}}P(x_t^{[\alpha,\infty)}\in A|{}_\alpha N_s)P(\mathrm{d}\omega)=$$

$$\int_\Omega I_BI_{\alpha\leqslant u}\;I_{\{x_t\in A,\alpha\leqslant t\}}\;P(\mathrm{d}\omega)=$$

$$\int_\Omega P(B,\alpha\leqslant u,x_t\in A|\sigma(x_s))P(\mathrm{d}\omega)=$$

$$\int_\Omega P(B,\alpha\leqslant u|\sigma(x_s))P(x_t\in A|\sigma(x_s))P(\mathrm{d}\omega)=$$

$$\int_\Omega E[P(x_t\in A|\sigma(x_s))I_BI_{\{\alpha\leqslant u\}}|\sigma(x_s)]P(\mathrm{d}\omega)=$$

$$\int_{B\{\alpha\leqslant u\}}P(x_t\in A|\sigma(x_s))P(\mathrm{d}\omega)$$

以上第 3 个等式利用了马氏过程在现在的条件下过去与将来独立。由 $\lambda-\pi$—系方法知

$$\int_B P(x_t^{[\alpha,\infty)}\in A|{}_\alpha N_s)P(\mathrm{d}\omega)=\int_B P(x_t\in A|\sigma(x_s))P(\mathrm{d}\omega)\tag{8}$$

对一切 $B\in{}_\alpha N_s$ 成立。又由马氏性得

$$P(x_t\in A|\sigma(x_s^{[\alpha,\infty)}))=P(x_t\in A|\sigma(x_s)),\quad P_{F_s}-a.e.$$

将上式代入（8）知 $\forall B\in{}_\alpha N_s$ 有

$$\int_B P(x_t^{[\alpha,\infty)}\in A|{}_\alpha N_s)P(\mathrm{d}\omega)=\int_B P(x_t\in A|\sigma(x_s^{[0,\infty)}))P(\mathrm{d}\omega)$$

注意到 $\sigma(x_s^{[0,\infty)})\subseteq{}_\alpha N_s$，故 $P(x_t\in A|\sigma(x_s^{[0,\infty)}))$ 关于 ${}_\alpha\mathrm{N}_s$ 可测。由 Randon-Nikodym 定理得

$$P(x_t^{[\alpha,\infty)} \in A \mid {}_\alpha N_s) = P(x_t \in A \mid \sigma(x_s^{[\alpha,\infty)})),$$
$$P_{{}_\alpha N_s} - a.e.$$

所以

$$P(x_t^{[\alpha,\infty)} \in A \mid {}_\alpha N_s) = P(x_t \in A \mid \sigma(x_s)) =$$
$$P(x_t \in A \mid F_s), P_{F_s} - a.e.$$

上式两边取关于 $\sigma(x_s^{[0,\infty)})$ 的条件期望并注意到 $\sigma(x_s^{[0,\infty)}) \subseteq {}_\alpha N \subseteq F_s$ 得1）的证明。

推论3 设 C 是任一非负常数，则 $X^{[C,\infty)}(t,\omega)$ 是定义在 $[C,\infty)$ 上的马氏过程。

推论4 若 $X(t,\omega)$ 是齐次马氏过程，则 $X^{[\alpha,\infty)}(t,\omega)$ 也是齐次马氏过程。

参考文献：

[1] WANG Ziukun, YANG Xiangqun. Birth and death processes and Markov chains [M]. Beijing: Science Press, 2006.

[2] 聂灵沼，丁石孙. 代数学引论 [M]. 北京：高等教育出版社，2002.

[3] 钱敏平，龚光鲁. 随机过程论 [M]. 北京：北京大学出版社，1997.

[4] 严加安. 鞅与随机积分引论 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1981.

[5] 侯振挺，邹捷中，张汉君等. 马尔可夫过程的 Q—矩阵问题 [M]. 长沙：湖南科学出版社，1994.

[6] 王梓坤. 随机过程通论 [M]. 北京：北京师范大学出版社，1996.

[7] 严士健，王隽骧，刘秀芳. 概率论基础 [M]. 北京：科学出版社，1982.

[8] CHUNG K L. Markov chains with stationary transition probabilities [M]. Berlin: Springer, 1967.

[9] MUKHERSEA A, POTHOVEN K. Real and functional analysis [M]. New York and London: Plenum Press, 1978.

[10] HOU Zenting, LIU Guoxin. Markov skeleton processes and their applications [M]. Beijing: Science Press, 2006.

[11] IOSIF II´ICH GIKHMAN. The theory of stochastic process (II) [M]. Translater Samuel Kotz New York: Springer-Verlag, 2004.

（上接第4页）

[9] PODDAR M. Orbifold Hodge numbers of Calabi-Yau hypersurfaces [J]. Pacic J Math, 2003, 208 (1): 151－167.

[10] JIANG Y F. The chen-ruan cohomology of weighted rrojective spaces [J]. Canadian Journal Mathematics, 2007, 59 (5): 981－1007.

[11] DANILOV V I. The geometry of toric varieties [J]. Russian Math. Surveys, 1978, 33 (2): 97－154.